

Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

PMS — Estrutura de classes

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ em \mathcal{S} . Dados $x, y \in \mathcal{S}$, dizemos que x *atinge* y ; notação: $x \rightarrow y$, se

$$\mathbb{P}_x(X_t = y \text{ para algum } t \geq 0) > 0,$$

e que x *se comunica com* y ; notação: $x \leftrightarrow y$, se $x \rightarrow y$ e $y \rightarrow x$.

Noções de *classe de comunicação*, *classe fechada*, *estado absorvente* e *irreduzibilidade*, em termos das noções do parágrafo anterior, são as mesmos do que para as CM's (em tempo discreto).

Teorema 1

Para $x \neq y \in \mathcal{S}$, são equivalentes as seguintes afirmações:

- (i) $x \rightarrow y$;
- (ii) $x \rightarrow y$ na cadeia de saltos;
- (iii) $q_{x_0 x_1}, \dots, q_{x_{n-1} x_n} > 0$ para algum $n \geq 1$ e $x = x_0, \dots, x_n = y$;
- (iv) $P_{xy}(t) > 0$ para todo $t > 0$;
- (v) $P_{xy}(t) > 0$ para algum $t > 0$.

Dem. Teo 1

iv \Rightarrow v \Rightarrow i \Rightarrow ii: claras.

(ii \Rightarrow iii) $x \rightarrow y \Rightarrow \pi_{x_0x_1}, \dots, \pi_{x_{n-1}x_n} > 0 \Rightarrow q_{x_0x_1}, \dots, q_{x_{n-1}x_n} > 0$

(iii \Rightarrow iv) Se $q_{xy} > 0$, então para $t > 0$

$$P_{xy}(t) \geq \mathbb{P}_x(T_1 \leq t, X_{Y_1} = y, T_2 > t) = (1 - e^{-q_x t})\pi_{xy}e^{-q_y t} > 0. \quad (1)$$

Segue então de (iii) e de (1) (e da PM) que

$$P_{xy}(t) \geq P_{x_0x_1}\left(\frac{t}{n}\right) \cdots P_{x_{n-1}x_n}\left(\frac{t}{n}\right) > 0. \quad \square$$

Tempos de chegada e probabilidades de absorção

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ em \mathcal{S} . Dado $A \subset \mathcal{S}$, o tempo de chegada a A é a variável aleatória

$$D^A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}; \text{ convenção: } \inf \emptyset = \infty.$$

Seja H^A o tempo de chegada a A da cadeia de saltos. Então

$$\{D^A < \infty\} = \{H^A < \infty\}, \text{ e, nesse evento, } D^A = S_{H^A}.$$

Seja ainda $h_x^A = \mathbb{P}_x(D^A < \infty) = \mathbb{P}_x(H^A < \infty)$.

Do Teo I do Álbum 3 (Teo 1.3.2 do livro) segue, reescrevendo Π em termos de \mathbf{Q} , o seguinte resultado.

Teorema 2

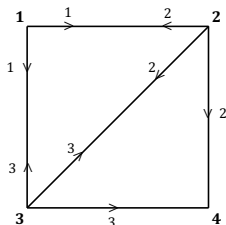
$h^A = (h_x^A, x \in \mathcal{S})$ é a solução mínima não negativa do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} h_x^A = 1, & \text{se } x \in A; \\ \sum_{y \in \mathcal{S}} q_{xy} h_y^A = 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Tempos de chegada esperados

Seja $k_x^A = \mathbb{E}_x(D^A)$, $x \in \mathcal{S}$, $A \subset \mathcal{S}$.

Exemplo.



$$A = \{4\}, k_x \equiv k_x^{\{4\}}.$$

$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3$$

$$k_1 = \frac{68}{48} = \frac{17}{12}$$

$$k_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_3 \quad \Rightarrow$$

$$k_2 = \frac{45}{48} = \frac{15}{16}$$

$$k_3 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2$$

$$k_3 = \frac{43}{48}$$

Teorema 3

Suponha que $q_x > 0$ para todo $x \notin A$. Então $(k_x^A, x \in \mathcal{S})$ é a solução mínima não negativa de

$$\begin{cases} k_x^A = 0, & \text{se } x \in A; & (2) \\ -\sum_{y \in \mathcal{S}} q_{xy} k_y^A = 1, & \text{se } x \notin A. & (3) \end{cases}$$

Dem.

(2) é claro.

$$\begin{aligned} (3): \mathbb{E}_x(D^A) &= \mathbb{E}_x(T_1 + D^A - T_1) \\ &= \mathbb{E}_x(T_1) + \mathbb{E}_x\left\{\mathbb{E}_x(D^A - T_1 | Y_1)\right\} \\ &= \frac{1}{q_x} + \sum_{y \in \mathcal{S}; y \neq x} \pi_{xy} \mathbb{E}_y(D^A). \end{aligned}$$

Logo, $q_x k_x^A = 1 + \sum_{y \neq x} q_{xy} k_y^A$, e (k_x^A) satisfaz (3).

Dem. Teo 3 (cont)

Suponha que $\ell = (\ell_x, x \in \mathcal{S})$ satisfaz (2) e (3) e $\ell_x \geq 0 \forall x \in \mathcal{S}$.

Então

$$\begin{aligned}\ell_x &= \frac{1}{q_x} + \sum_{y \notin A} \pi_{xy} \ell_y = \frac{1}{q_x} + \sum_{y \notin A} \pi_{xy} \left(\frac{1}{q_y} + \sum_{z \notin A} \pi_{yz} \ell_z \right) \\ &= \mathbb{E}_x(T_1; H^A \geq 1) + \mathbb{E}_x(T_2; H^A \geq 2) + \sum_{y \notin A} \sum_{z \notin A} \pi_{xy} \pi_{yz} \ell_z \\ &\quad \vdots \\ &= \mathbb{E}_x(T_1; H^A \geq 1) + \cdots + \mathbb{E}_x(T_n; H^A \geq n) + \sum_{y_1, \dots, y_n \notin A} \pi_{xy_1} \cdots \pi_{y_{n-1}y_n} \ell_{y_n} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_x(T_i; H^A \geq i) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A \wedge n} T_i\right), \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\ell_x \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A \wedge n} T_i\right) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{i=1}^{H^A} T_i\right) = \mathbb{E}_x(D^A) = k_x^A.$$

□

Recorrência e Transitoriedade

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$ em \mathcal{S} ; dizemos que $x \in \mathcal{S}$ é *recorrente* se

$$\mathbb{P}_x(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ é não limitado}) = 1$$

e *transitório* se

$$\mathbb{P}_x(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ é não limitado}) = 0.$$

Obs. Se (X_t) puder explodir a partir de x , então x não pode ser recorrente.

Teorema 3

Valem as seguintes afirmações:

- (i) Se $x \in \mathcal{S}$ for recorrente para (Y_n) , então x é recorrente para (X_t) ;
- (ii) Se $x \in \mathcal{S}$ for transitório para (Y_n) , então x é transitório para (X_t) ;
- (iii) Cada estado é ou transitório ou recorrente;
- (iv) Recorrência e transitoriedade são propriedades de classe.

Dem. Teo 3

(i) Pelo Teo 2 do Álbum 17 (Teo 2.7.1 do livro), se x for recorrente para (Y_n) , então (X_t) é não explosivo a partir de x . Logo, sob \mathbb{P}_x , $S_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $X_{S_n} = Y_n = x$ i.v. qc. Logo, $\{t \geq 0 : X_t = x\}$ é ilimitado qc.

(ii) Seja N o tempo da última visita de (Y_n) a x . Então, sob \mathbb{P}_x , $N < \infty$ qc, e logo $\{t \geq 0 : X_t = x\}$ é limitado por $S_{N+1} < \infty$ qc, pois $(Y_n, n \leq N)$ não pode incluir estado absorvente.

(iii) e (iv) valem no caso contínuo por valerem no caso discreto, usando (i) e (ii).

Critério de recorrência e transitoriedade

Seja \mathcal{T}_x o tempo de primeira passagem de (X_t) por $x \in \mathcal{S}$:

$$\mathcal{T}_x = \inf\{t \geq S_1 : X_t = x\}.$$

Teorema 4

Vale a seguinte dicotomia.

(i) Se $q_x = 0$ ou $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$, então x é recorrente e

$$\int_0^\infty P_{xx}(t) dt = \infty;$$

(ii) Se $q_x > 0$ e $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) < 1$, então x é transitório e

$$\int_0^\infty P_{xx}(t) dt < \infty.$$

Dem. (i) óbvio se $q_x = 0$ (neste caso, x absorvente e $P_{xx}(t) = 1, t \geq 0$).

Suponhamos então que $q_x > 0$, e seja N_x a 1ª passagem de (Y_n) por x .

Então

$$\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = \mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty). \quad (4)$$

Pelo Teo 3 e o resultado para a cadeia de saltos (Teo 1 do Álbum 4), x é recorrente se e só se $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$.

Dem. Teo 4 (cont)

Seja $\pi_{xx}^{(n)} = (\mathbf{\Pi}^n)_{xx}$. Vamos mostrar que

$$\int_0^\infty P_{xx}(t) dt = \frac{1}{q_x} \sum_{n=0}^\infty \pi_{xx}^{(n)} \quad (5)$$

e logo x é recorrente sse $\int_0^\infty P_{xx}(t) dt = \infty$, pelo Teo 3 e o resultado correspondente para (Y_n) . Por Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{xx}(t) dt &= \int_0^\infty \mathbb{E}_x(\mathbb{1}\{X_t = x\}) dt = \mathbb{E}_x\left(\int_0^\infty \mathbb{1}\{X_t = x\} dt\right) \\ &= \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^\infty T_{n+1} \mathbb{1}\{Y_n = x\}\right) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{E}_x(T_{n+1} | Y_n = x) \mathbb{P}_x(Y_n = x) \\ &= \frac{1}{q_x} \sum_{n=0}^\infty \pi_{xx}^{(n)}. \quad \square(i) \end{aligned}$$

Sob as condições de (ii), (4) vale, e logo x é transitório para a cadeia de saltos; a última condição de (ii) então segue de (5) e do critério de transitoriedade para CM's em tempo discreto (Teo 1 do Álbum 4). \square

Teorema 5

Fixemos $h > 0$, e seja $Z_n = X_{nh}$.

- (i) Se x for recorrente p/(X_t), então x é recorrente p/(Z_n).
- (ii) Se x for transitório p/(X_t), então x é transitório p/(Z_n).

Dem. (ii) é claro.

$$(i) P_{xx}(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h + h) \geq \mathbb{P}_x(X_t = x, \text{ tempo até 1ro salto após } t \text{ é } > t + h) \\ = P_{xx}(t) e^{-q_x h}$$

Logo, $P_{xx}(t) \leq e^{q_x h} P_{xx}(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h + h)$, e

$$\infty = \int_0^{\infty} P_{xx}(t) dt \leq e^{q_x h} \int_0^{\infty} P_{xx}(\lfloor t/h \rfloor h + h) dt \\ = e^{q_x h} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nh}^{nh+h} \overbrace{P_{xx}(\lfloor t/h \rfloor h + h)}^{P_{xx}(nh+h)} dt = h e^{q_x h} \sum_{n=1}^{\infty} P_{xx}(nh).$$

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} P_{xx}(nh) = \infty$ e (Z_n) é recorrente pelo critério satisfeito por CM's em tempo discreto.